



Approche de la performance relative pour la commande de systèmes de grande dimension

Anton Korniienko, Gérard Scorletti, E Colinet, Eric Blanco

► To cite this version:

Anton Korniienko, Gérard Scorletti, E Colinet, Eric Blanco. Approche de la performance relative pour la commande de systèmes de grande dimension. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. hal-01181170

HAL Id: hal-01181170

<https://hal.science/hal-01181170>

Submitted on 29 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche de la performance relative pour la commande de systèmes de grande dimension

A. Korniienko^{*,**} G. Scorletti^{**} E. Colinet^{*} E. Blanco^{**}

^{*} CEA, LETI, MINATEC, 17 rue des martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France (e-mail : anton.korniienko@ec-lyon.fr)

^{**} Laboratoire Ampère, Ecole Centrale de Lyon, 36 Av. Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

Résumé. Dans ce papier, le problème de la synthèse de la loi de commande décentralisée pour des systèmes de grande dimension ou des systèmes de Multi-Agents composés de sous-systèmes identiques, assurant la stabilité et un niveau de performance globales, est considéré. Inspiré par l'approche entrée-sortie, le problème de synthèse est réduit à un problème de satisfaction de deux contraintes : (i) la contrainte sur la dynamique du système d'interconnexion et (ii) la contrainte sur la dynamique des sous-systèmes locaux (ou agents). Les deux problèmes ont été résolus en appliquant l'optimisation convexe sous contraintes LMI et une synthèse H_∞ standard. La méthode proposée est appliquée à la synthèse de la loi de commande pour la synchronisation du réseau de PLLs.

Mots clefs : Systèmes Multi-Agent, Commande Décentralisée H_∞ , dissipativité, l'approche entrée-sortie, optimisation LMI, consensus, coopération, synchronisation du réseau de PLLs.

1. INTRODUCTION

Récemment, l'étude de systèmes de grande dimension ou Multi-Agents composés de sous-systèmes intelligents, interconnectés en réseau, a attiré une grande attention au sein de la communauté du contrôle. La capacité de tels systèmes à couvrir un large spectre d'applications, leur robustesse vis-à-vis des défaillances possibles des constituants, la miniaturisation et l'avancée de la Microélectronique sont les points clefs d'une telle hausse de l'intérêt pour ce type de systèmes. Réseaux automatiques de véhicules, de satellites, de capteurs et beaucoup d'autres sont des applications typiques profitant du progrès dans ce domaine. Les problèmes souvent considérés dans ces applications sont les suivants : consensus, coordination, problèmes de rendez-vous, synchronisation, *etc.* Une bonne revue sur ce sujet peut être trouvée dans Ren et al. (2005), Olfati-Saber et al. (2007); Murray (2007).

Généralement, une structure de commande décentralisée, c'est-à-dire où les correcteurs sont placés à l'intérieur de chaque sous-système local, est adoptée, pour des raisons pratiques de réalisation. Il existe ainsi, un grand nombre de résultats de synthèse de lois de commande pour les systèmes Multi-Agents se basant d'une manière générale sur la stabilisation simultanée proposée pour la première fois par Fax and Murray (2004). Cependant, ces résultats garantissent seulement la stabilité globale et/ou un objectif de performance globale bien particulier, par exemple la poursuite d'une valeur constante dans le cas de consensus, Wieland and Allgöwer (2010), ou bien la réjection de perturbation sur une sortie bien particulière comme présenté dans Liu et al. (2009). Il est difficile dans

le contexte de la commande décentralisée, de garantir un niveau de performance globale plus générale (Tonetti and Murray (2010)), multicritère, prenant en compte différents entrées et sorties sous la forme, par exemple, de contraintes fréquentielles imposées sur les fonctions de transfert de performance globale. La difficulté provient de la complexité des conditions à satisfaire et d'un niveau de conservatisme important dans le cas de leur relaxation (Liu et al. (2009)). Il est donc nécessaire de donner une méthode de synthèse de la loi de commande garantissant la stabilité et la performance globales d'un système de grande dimension avec une performance définie de manière plus générale.

Un premier pas d'une telle démarche a été présenté dans Korniienko et al. (2011b), où, en se basant sur le résultat de Scorletti and Duc (2001) et sur l'identité de sous-système locaux, nous avons proposé une méthode de synthèse de la loi de commande qui assure la stabilité globale et un niveau de performance générale de chaque sous-système local. Cette méthode repose sur l'optimisation convexe sous contraintes LMIs et une synthèse H_∞ standard pour un sous-système local, ce qui réduit considérablement la complexité de la synthèse. La raison pour laquelle nous avons choisi de passer par l'étape de la performance locale est le fait que dans un système de grande dimension composé de sous-systèmes identiques, il y a un fort lien entre la performance locale et la performance globale. La différence entre les deux cas est définie par l'interconnexion. Ainsi, il est possible par « un réglage local » de fixer un niveau de performance globale acceptable en minimisant cette différence. Un deuxième point, qui n'est pas le moindre, est que dans beaucoup d'applications, comme par exemple en Microélectronique (le problème de la synchronisation du réseau de boucles à verrouillage de phase (PLLs) considéré ici), il existe des méthodes et des outils de la conception d'un sous-système local (PLL) bien

★. Ce travail a été supporté par l'Agence Nationale française de la Recherche (ANR).

connus et maîtrisés. Il est donc intéressant et naturel de proposer une méthode de synthèse de la loi de commande se basant sur la synthèse locale pour qu'elle soit efficace et facilement exploitable pour la conception. Pour assurer les propriétés désirées du système global, cette méthode devrait donc inclure des conditions supplémentaires assurant le lien local-global. Afin d'établir ce lien entre les propriétés globales et locales, l'approche entrée-sortie et la Théorie de la dissipativité sont utilisées dans cet article. Ensuite la méthode proposée est combinée avec la commande robuste H_∞ et l'optimisation sous contraintes LMIs conduisant à un développement d'algorithmes efficaces de résolution du problème posé.

2. NOTATION ET DÉFINITIONS

Pour une matrice réelle A , A^T est sa transposée, et pour une matrice complexe C , C^* représente la matrice transposée conjuguée. Le *Produit de Kronecker* entre deux matrices A et B noté $A \otimes B$ est défini par : $A \otimes B = [a_{ij}B]$. Une *LFT* (*Transformation Fractionnelle Inférieure*) de $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ et F est notée $G \star F$ et définie par : $G \star F = G_{11} + G_{12}F(I - G_{22}F)^{-1}G_{21}$. Une *UFT* (*Transformation Fractionnelle Supérieure*) est définie par : $F \star G = G_{22} + G_{21}F(I - G_{11}F)^{-1}G_{12}$.

Définition 1. (Dissipativité). Un opérateur causal G avec l'entrée r et la sortie φ est *strictement* $\{X, Y, Z\}$ -*dissipatif*, s'il existe un scalaire réel $\varepsilon > 0$ et les matrices réelles $X = X^T, Y, Z = Z^T$ telles que $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}$ est une matrice de rang plein et pour tout $\tau > 0$ avec $\varphi = G(r)$:

$$\int_0^\tau \begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} dt \leq -\varepsilon \int_0^\tau r(t)^T r(t) dt \quad (1)$$

si l'inégalité (1) est satisfaite avec $\varepsilon = 0$, l'opérateur est alors appelé $\{X, Y, Z\}$ -*dissipatif*.

Si en plus, l'opérateur G est un opérateur causal, LTI, stable de dimensions finies, l'équation (1) peut donc être simplifiée en une condition dans le domaine fréquentiel pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{bmatrix} I \\ G(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ G(j\omega) \end{bmatrix} \leq -\varepsilon I$$

3. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons un système de grande dimension qui consiste en une interconnexion de N sous-systèmes identiques T_s . Pour des raisons de clarté et sans perte de généralité, on se place dans le cas d'un sous-système carré, c'est-à-dire un sous-système T_s avec le même nombre p d'entrées et de sorties. Chaque sous-système est LTI, causal et peut être divisé en deux parties : (i) une partie H du sous-système appelé le procédé à commander et (ii) une partie K réalisant la commande, appelé le correcteur. L'ensemble des sous-systèmes est décrit par un opérateur LTI global \tilde{T} et leur interconnexion par un opérateur LTI causal et stable M (voir la Figure 1a) :

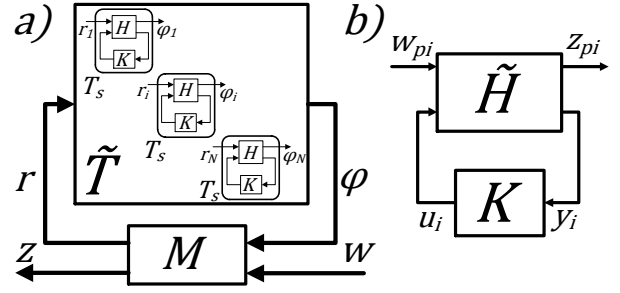


FIGURE 1. Systèmes LTIs global/local considérés

$$\begin{aligned} \varphi &= \overbrace{(I_N \otimes T_s)}^{\tilde{T}} r \\ \begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \varphi \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

avec $T_s = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_H \star K$, $r(t), \varphi(t) \in \mathbb{R}^{pN}$, $[w(t), z(t)] \in [\mathbb{R}^{n_w}, \mathbb{R}^{n_z}]$.

Le système (2) représente un système global de grande dimension. Tout au long de cet article, nous considérons la stabilité globale et locale ainsi que la performance globale et locale. Le sous-système considéré local correspondant est représenté sur la Figure 1b et décrit par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_{pi} \\ y_i \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{H}} \begin{bmatrix} w_{pi} \\ u_i \end{bmatrix} \\ u_i &= K y_i \end{aligned} \quad (3)$$

avec $[w_{pi}(t), z_{pi}(t), y_i(t), u_i(t)] \in [\mathbb{R}^{n_{wp}}, \mathbb{R}^{n_{zp}}, \mathbb{R}^{n_y}, \mathbb{R}^{n_u}]$.

Il est très important de distinguer ces propriétés pour les deux cas. La **stabilité locale** correspond à la stabilité d'un sous-système indépendant (3) sans autres sous-systèmes et sans interconnexion tandis que la **stabilité globale** correspond à la stabilité du système complet de grande dimension défini par (2). La **performance locale** est évaluée pour un sous-système (3) séparé du réseau, augmenté par les entrées et les sorties de performance w_{pi} et z_{pi} respectivement. La **performance globale** est évaluée pour le système complet de grande dimension (2) avec les entrées w et les sorties z globales de performances correspondantes. Ces entrées et sorties définissent les dimensions et la structure des opérateurs LTIs \tilde{H} et M respectivement.

Les spécifications de performance pour le cas global et le cas local sont exprimées sous forme de minimisation des normes H_∞ des fonctions de transfert $T_{w \rightarrow z} = \tilde{T} \star M$ et $T_{w_{pi} \rightarrow z_{pi}} = \tilde{H} \star K$ respectivement. Sous la condition que les deux systèmes associés soient stables, ceci permet d'imposer des contraintes fréquentielles réalisant les spécifications de performance générales. En choisissant les entrées et les sorties appropriées ainsi que les contraintes fréquentielles concernées, nous pouvons aborder non seulement le problème de synchronisation PLLs considéré comme exemple d'application dans cet article mais aussi d'autres types de problèmes de systèmes Multi-Agents et de systèmes de grande dimension tels que : consensus, coopération, coordination, rendez-vous *etc.*

Par la suite nous considérons le problème général suivant :

Problème 2. (Problème de la synthèse). *Étant donné un système LTI H , et un système LTI M décrivant l'interconnexion, trouver un système LTI K tel qu'il :*

- (1) *Stabilise chaque sous-système ((3) représenté sur la Figure 1b) séparément ainsi que le système global ((2) représenté sur la Figure 1a);*
- (2) *Assure les spécifications de performance locale par la minimisation de la norme H_∞ de la fonction de transfert $T_{w_{pi} \rightarrow z_{pi}} = \tilde{H} \star K$ entre les entrées w_{pi} et les sorties z_{pi} de performance;*
- (3) *Assure les spécifications de performance globale par la minimisation de la norme H_∞ de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow z} = \tilde{T} \star M$ entre les entrées w et les sorties z de performance.*

4. CONDITIONS LOCALES POUR LA STABILITÉ ET LA PERFORMANCE GLOBALES

On rappelle que selon le principe de séparation (Moylan and Hill (1978)) si le sous-système T_s (respectivement l'interconnexion M) est caractérisé(e) par une propriété de dissipativité, il est possible d'assurer la stabilité du système global en assurant la propriété de dissipativité complémentaire sur le système d'interconnexion M (respectivement le sous-système T_s). Ainsi, ce résultat est utilisé dans le Théorème 1 de Kornienko et al. (2011b) ce qui a permis de transformer la condition de stabilité globale du système (2) en une condition sur le système d'interconnexion M et une condition sur la dynamique locale du sous-système T_s . Ce résultat peut donc être combiné avec des résultats classiques de synthèse de loi de commande afin d'obtenir la loi de commande assurant *a priori* la stabilité globale. Le résultat assurant la performance globale est obtenu de manière similaire comme présenté par la suite.

Théorème 3. Soit le système bien posé et causal décrit par l'équation (2). Pour les matrices réelles données $X = X^T \leq 0$, $Y, Z = Z^T \geq 0$ de dimensions $p \times p$ et une borne donnée $\eta > 0$, s'il existe une matrice réelle symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ telle que

(i) le système d'interconnexion M est $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}\}$ -dissipatif avec des matrices $\tilde{X} = \text{diag}(P \otimes X, -\eta^2 I)$, $\tilde{Y} = \text{diag}(P \otimes Y, 0)$, $\tilde{Z} = \text{diag}(P \otimes Z, I)$ c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} I \\ M(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P \otimes X & 0 & P \otimes Y & 0 \\ 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 \\ P \otimes Y^T & 0 & P \otimes Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M(j\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4)$$

pour presque $\forall \omega \in \mathbb{R}$;

(ii) le sous-système local T_s satisfait la condition :

$$\|\hat{T}\|_\infty < 1 \quad (5)$$

avec $\hat{T} = (-X)^{\frac{1}{2}} (T_s + X^{-1}Y) (Z - Y^T X^{-1}Y)^{-\frac{1}{2}}$

Le système global (2) est stable de façon interne et la norme H_∞ de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow z} = M \star \hat{T}$ est inférieure ou égale à η c'est-à-dire :

$$\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty < \eta. \quad (6)$$

Démonstration. Tout d'abord nous démontrons la stabilité et après la borne sur la norme H_∞ de la fonction de transfert globale $T_{w \rightarrow z}$.

La stabilité est impliquée par le Théorème 1 de Kornienko et al. (2011b). En effet, la condition (ii) du Théorème 1 de Kornienko et al. (2011b) est identique à la condition (ii) du présent Théorème et donc est satisfaite par (5).

D'un autre côté, la condition (4) s'exprime comme :

$$\begin{bmatrix} I \\ M_{11}(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P \otimes X & P \otimes Y \\ P \otimes Y^T & P \otimes Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M_{11}(j\omega) \end{bmatrix} \leq -M_{12}^T M_{12} \leq 0. \quad (7)$$

La dernière condition implique que le système d'interconnexion M_{11} est $\{P \otimes X, P \otimes Y, P \otimes Z\}$ -dissipatif c'est-à-dire la condition (i) du Théorème 1 de Kornienko et al. (2011b) est aussi satisfaite. La stabilité du système global (2) représenté sur la Figure 1 est alors assurée par l'application du Théorème 1 de Kornienko et al. (2011b).

Prouvons maintenant la condition sur la borne H_∞ . La condition (4), en prenant en compte la description du système global (2), implique la condition quadratique suivante dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt \\ & \leq - \int_0^\tau \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \otimes X & P \otimes Y \\ P \otimes Y^T & P \otimes Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (8)$$

pour $\forall \tau > 0$, pour tous les signaux en entrée w et les signaux r, φ, z définis par (2).

Rappelons que la condition (5) définit la propriété de stricte $\{-Z, -Y^T, -X\}$ -dissipativité de l'opérateur T_s et donc la propriété de stricte $\{-P \otimes Z, -P \otimes Y^T, -P \otimes X\}$ -dissipativité de l'opérateur global diagonal \tilde{T} (voir la démonstration du Théorème 1 de Kornienko et al. (2011a)).

Par conséquent, $\forall P = P^T > 0$ et avec $\varphi = \tilde{T}r$ la condition suivante est respectée pour un $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^\tau \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P \otimes X & -P \otimes Y \\ -P \otimes Y^T & -P \otimes Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} dt \leq -\varepsilon \int_0^\tau r(t)^T r(t) dt \quad (9)$$

En additionnant ensemble les deux conditions (9) et (8) nous obtenons pour $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^\tau \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt \leq -\varepsilon \int_0^\tau w(t)^T w(t) dt \quad (10)$$

La dernière condition implique que la norme induite \mathcal{L}_2 de l'opérateur global $T_{w \rightarrow z}$ est inférieure à $\eta > 0$ qui correspond à la norme H_∞ dans le cas du système LTI.

Remarque 4. La condition de dissipativité (4) sur le système d'interconnexion LTI M peut être transformée en une condition LMI des variables de décision P et R pour des matrices données $X = X^T \leq 0$, $Y, Z = Z^T \geq 0$ avec $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ définies dans la condition (i) du Théorème 3 :

- (1) Dans le cas de la matrice constante réelle $M \in \mathbb{R}^{(pN+n_{wp}) \times (pN+n_{zp})}$ (système d'interconnexion statique), cela est direct : $\exists \eta \in \mathbb{R}, \exists P \in \mathbb{R}^{N \times N} : P = P^T > 0$,

$$\begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T & \tilde{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} \leq 0 \quad (11)$$

- (2) Dans le cas du système d'interconnexion LTI dynamique M tel que la matrice de fonctions de transfert

$$[I \ M(s)]^T = C(sI - A)^{-1} B + D$$

a les matrices réelles de représentation d'états A, B, C, D de dimensions appropriées, la condition LMI peut être obtenue après une application du Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (Lemme KYP, Rantzer (1996)) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \exists P : P = P^T > 0, \exists R : R = R^T > 0 :$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{X} & \tilde{Y} \\ & \tilde{Y}^T & \tilde{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \leq 0 \quad (12)$$

Les résultats de cette section donnent des conditions locales nécessaires à satisfaire pour assurer la stabilité et la performance globales. La section suivante a pour but d'illustrer comment trouver la loi de commande décentralisée satisfaisant ces conditions c'est-à-dire comment réaliser une synthèse de la loi de commande résolvant le Problème 2.

5. SYNTHÈSE DE LA LOI DE COMMANDE

Dans cet article, nous considérons que les matrices de la caractérisation de dissipativité c'est-à-dire les matrices $X = X^T \leq 0, Y, Z = Z^T \geq 0$ sont données. Une méthodologie décrivant un choix approprié de ces matrices est proposée dans Kornienko et al. (2011a).

Soient les spécifications de performance issues le cahier des charges et exprimées sous la forme d'une minimisation de la norme H_∞ de la fonction de transfert globale $\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty$. Etant donné que grâce à la méthode de synthèse H_∞ standard, il est possible d'assurer un niveau de performance locale, nous allons exprimer l'exigence de performance globale sous la forme d'une minimisation de la « différence » entre la performance locale et la performance globale. Ainsi, la fonction de transfert de la performance locale $T_{\hat{w}_{pi} \rightarrow \hat{z}_{pi}}$ sera utilisée comme une fonction de pondération fixant la contrainte fréquentielle à respecter selon la synthèse H_∞ standard. Dans ce qui suit, cette approche est appelée l'approche de la *performance globale relative* et la fonction de transfert associée, exprimant la « différence entre les fonctions de transfert de performance globale et locale », la *fonction de transfert relative pondérée*.

La fonction de transfert relative pondérée T_g est une fonction de transfert globale qui peut être facilement choisie afin de « comparer » différentes fonctions de transfert de performance globale avec les fonctions de transfert de performance locale correspondantes : $T_g = f(T_{\hat{w}_{pi} \rightarrow \hat{z}_{pi}}, T_{w \rightarrow z})$. Néanmoins, une condition doit être satisfaite : la fonction de transfert relative pondérée doit être exprimée sous la forme d'une *UFT* (ou *LFT*) pour les sous-systèmes T_s . Ce qui signifie que le bloc supérieur (respectivement inférieur) est un bloc-diagonal composé des sous-systèmes T_s comme présenté sur la Figure 2. Nous verrons à la fin de cet article lors de l'exemple numérique d'application de la dernière section, que cette hypothèse est pertinente et en réalité n'est pas restrictive.

Sur la Figure 2, le bloc \tilde{T} est décomposé en deux parties : (i) N sous-systèmes T_s réels du réseau et k sous-systèmes T_s « virtuels » nécessaires à la construction de la fonction de transfert relative pondérée de performance globale T_g . Le système augmenté \tilde{M} décrit la topologie d'interconnexion entre ces sous-systèmes, ce qui est résumé par l'équation suivante, similaire à celle de (2) :

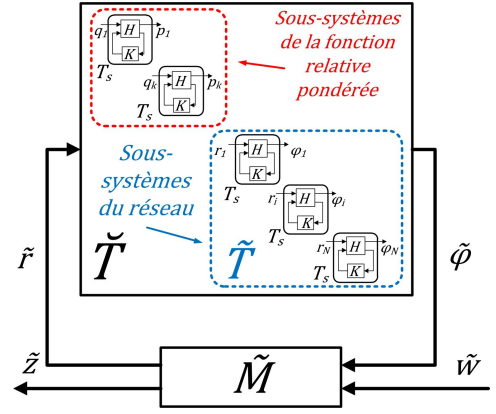


FIGURE 2. Fonction de transfert relative pondérée de la performance globale T_g sous forme d'une *UFT* en T_s

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \overbrace{(I_{N+k} \otimes T_s)}^{\tilde{T}} \tilde{r} \\ \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{M}} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

avec $\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^{p(N+k)}, \tilde{w}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_w}, \tilde{z}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_z}$.

La synthèse de la loi de commande résolvant le Problème 2 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 5. Soit le système bien posé et causal décrit par l'équation (13). Pour les matrices réelles données $X = X^T \leq 0, Y, Z = Z^T \geq 0$ de dimensions $p \times p$ et une borne donnée $\eta > 0$ s'il existe une matrice réelle symétrique définie positive $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{(N+k) \times (N+k)}$ telle que

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{M}(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \tilde{P} \otimes X & 0 & \tilde{P} \otimes Y & 0 \\ 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 \\ \tilde{P} \otimes Y^T & 0 & \tilde{P} \otimes Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{M}(j\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (14)$$

pour presque tout $\omega, \omega \in \mathbb{R}$; la loi de commande décentralisée associée au correcteur K et assurant

$$\|T_{i \rightarrow o}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} T_{w_{pi} \rightarrow z_{pi}} & * \\ * & \hat{T} \end{matrix} \right\|_\infty \leq \gamma < 1 \quad (15)$$

résout le Problème 2 c'est-à-dire qu'elle :

(i) Stabilise (3) représenté sur la Figure 1b et (13) représenté sur la Figure 2;

(ii) Assure un niveau de la performance locale fixée par

$$\|T_{w_{pi} \rightarrow z_{pi}}\|_\infty = \|W_o T_{\hat{w}_{pi} \rightarrow \hat{z}_{pi}} W_i\|_\infty < 1; \quad (16)$$

(iii) Assure un niveau de performance globale fixée par

$$\|T_g\|_\infty \leq \eta. \quad (17)$$

Démonstration. (i) La stabilité locale découle de la condition (15), étant donné qu'un système instable ne peut pas avoir une norme H_∞ bornée. La stabilité globale à son tour est assurée par l'application du Théorème 3 avec le nouveau système d'interconnexion \tilde{M} et une nouvelle matrice symétrique définie positive \tilde{P} car (5) est impliquée par (15).

(ii) La deuxième partie du Problème 2 est satisfaite par la condition (15) impliquant (16).

(iii) La condition (17) est assurée par l'application directe du Théorème 3. Le correcteur K résout donc le Problème 2, ce que conclut la démonstration.

Le Théorème 5 permet de synthétiser la loi de commande décentralisée assurant la stabilité locale et globale ainsi qu'un niveau de performance locale et que la différence entre ce niveau et le niveau de performance globale défini par la fonction de transfert relative pondérée T_g est inférieur à η . En outre, selon la Remarque 4, une optimisation convexe sous contraintes LMI peut être appliquée pour minimiser la borne η et donc de minimiser cette différence.

6. APPLICATION À LA CONCEPTION DU RÉSEAU DE PLLS

Dans cette section, un exemple numérique de synchronisation d'un réseau de PLLs est considéré. Le réseau contient $N = 13$ PLLs interconnectées selon la topologie représentée sur la Figure 3 où le signal de référence est connecté à la première PLL. Le choix d'une telle topologie ayant un cycle global est motivé par une difficulté particulière, dans ce cas-là, de la conception de loi de commande perforante (voir Tonetti and Murray (2010)). Appliquons la synthèse de la loi de commande proposée.

Chaque PLL est supposée identique et modélisée dans le domaine de phase par $T_s = H \star K$ avec le procédé à commander H :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_G}{s} \\ 1 & -\frac{K_G}{s} \end{bmatrix}$$

où $K_G = 5.34 \cdot 10^3$ est le gain du procédé et K est le correcteur (ou le filtre) à concevoir.

Supposons que pour assurer la performance du réseau la fonction de transfert S_{glob} entre le signal de référence $w = Ref$ et l'erreur de son suivi par la première PLL $z = Ref - \varphi_1$, doit respecter une contrainte fréquentielle de +40 dB/dec en basses fréquences, avoir une fréquence de coupure de minimum $\omega_c^{min} = 420$ rad/sec et un gain maximale de 8 dB. Comme dans la procédure de synthèse H_∞ standard, la contrainte fréquentielle est réalisée par l'inverse de la fonction de pondération $W_s(s)$:

$$W_s(s) = \frac{0.36(s + 1085)}{s + 0.24}; \quad (18)$$

et représentée sur la Figure 4. La fonction de transfert de performance locale associée, S_{loc} , reliant le signal de référence en entrée d'une seule PLL \hat{w}_{pi} avec le signal de sortie de son suivi par la même PLL $\hat{z}_{pi} = \hat{w}_{pi} - \varphi_i$ est donnée par $S_{loc} = \hat{H} \star K$ avec :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{K_G}{s} \\ 1 & -\frac{K_G}{s} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} W_o(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \hat{H} \begin{bmatrix} W_i(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Cette fonction locale de transfert est en réalité la fonction de sensibilité de la boucle locale et sera utilisée par la suite pour imposer la contrainte fréquentielle sur la fonction de transfert globale, S_{glob} , selon l'approche de la performance relative proposée dans cet article. Plus de détails sur le modélisation en domaine de phase du réseau de PLLs et la spécification de performance en domaine fréquentiel peuvent être trouvés dans Kornienko et al. (2011a).

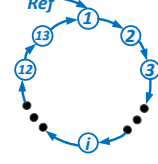


FIGURE 3. Topologie d'interconnexion de PLLs considérée

Le modèle du réseau global est alors décrit par (2) avec :

$$M_{11}^{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m_i} & \text{si l'ADPLL } i \text{ reçoit} \\ & \text{information de l'ADPLL } j \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \quad M_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -1 & \overbrace{0 \cdots 0}^{N-1} \end{bmatrix} \quad M_{22} = 1$$

où m_i représente le nombre d'entrées de la i -ème PLL et M_{11}^{ij} est l'élément ij de la matrice M_{11} . Appliquons la synthèse de la loi de commande proposée dans le Théorème 5 pour respecter la contrainte fréquentielle sur la fonction de transfert globale S_{glob} . Étant donné que l'on peut assurer les contraintes fréquentielles sur les fonctions de transfert locales (c'est-à-dire un niveau de la performance locale) et une « distance » maximale entre ces fonctions de transfert et les fonctions de transfert de performance globale associées, nous allons utiliser l'approche de la performance globale relative. Selon l'approche, il faut tout d'abord trouver une fonction de transfert relative pondérée T_g nécessaire pour évaluer la « différence » entre la performance locale et la performance globale et ensuite la transformer sous forme d'une UFT (ou LFT) en T_s .

Étant donné que les objectifs de performance sont souvent exprimés en échelle logarithmique, la « distance » entre les deux fonctions de transfert (globale et locale) va être évaluée en terme de leur rapport. Choisissons alors la fonction de transfert relative pondérée $T_g(s)$ sous la forme suivante, pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$T_g(s) = \frac{S_{glob}(s)}{S_{loc}(s) + \alpha}. \quad (20)$$

Le paramètre α dans l'expression de la fonction de transfert relative pondérée (20) est utilisé pour éviter une division par zéro (comportement intégrateur pur de la boucle ouverte $K(s)K_G/s$, voir Kornienko et al. (2011a) pour plus de détails).

La performance globale est évaluée par le calcul de la borne supérieure η de la norme H_∞ de $T_g(s)$:

$$\|T_g(s)\|_\infty \leq \eta \Leftrightarrow |T_g(j\omega)| \leq \eta, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Dans l'échelle logarithmique et le cas SISO, (21) devient :

$$|S_{globale}(j\omega)|_{dB} - |S_{locale}(j\omega) + \alpha|_{dB} \leq \mu. \quad (22)$$

Dans le domaine de fréquences où $\alpha \ll |S_{locale}(j\omega)|$, le paramètre α peut être négligé. La fonction de transfert relative pondérée est alors exprimée comme $T_g(s) \approx \frac{S_{glob}(s)}{S_{loc}(s)}$ et la condition (22) est équivalente à :

$$|S_{glob}(j\omega)|_{dB} - |S_{loc}(j\omega)|_{dB} \leq \mu, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Autrement dit, dans l'échelle logarithmique, le module de la fonction de transfert de performance globale S_{glob} est borné par le module de la fonction de transfert de performance locale S_{loc} plus une valeur de μ dB. Cette situation est illustrée sur la Figure 4. Si la fonction

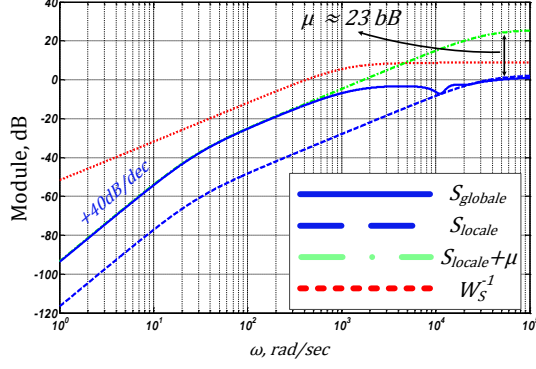


FIGURE 4. Le module de fonctions de transfert obtenues : S_{glob} (la ligne bleue plein), S_{loc} (la ligne bleue en trait long), $S_{loc} + \mu dB$ (la ligne verte en trait interrompu mixte) et la contrainte fréquentielle correspondante (la ligne rouge en trait court)

de transfert locale (la ligne bleue en trait long sur la Figure 4) plus μdB fixe une borne (la ligne verte en trait interrompu mixte sur la Figure 4) inférieure à la contrainte fréquentielle de performance à satisfaire selon le cahier des charges (la ligne rouge en trait court sur la Figure 4), alors la fonction de transfert globale (la ligne bleue pleine sur la Figure 4) satisfait cette contrainte.

On choisit pour notre exemple la valeur de $\alpha = 0.01$ correspondante à $20 \log_{10}(\alpha) = -40dB$. En conclusion, la borne supérieure μ sur le module de la fonction de transfert relative pondérée (20) implique que le module de la fonction de transfert globale S_{glob} est borné par le module de la fonction de transfert S_{loc} plus μdB dans le domaine de pulsations où $\alpha = -40dB \ll |S_{loc}(j\omega)|$.

L'étape suivante est la transformation de la fonction de transfert relative pondérée (20) en une UFT en T_s . Étant donné que par définition la fonction de sensibilité $S = 1 - T$ et que $S_{loc} = S$ et $T_s = T$ dans l'application considérée, l'équation (20) est mise sous la forme du schéma représenté sur la Figure 2, avec $k = 1$, $\theta = \frac{1}{1 + \alpha}$ et :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= I_{N+1} \otimes T_s, & \tilde{w} &= w, & \tilde{z} &= q \\ \tilde{M} &= \begin{bmatrix} \theta & \theta M_{21} & \theta M_{22} \\ 0 & M_{11} & M_{12} \\ \theta & \theta M_{21} & \theta M_{22} \end{bmatrix}, & \tilde{r} &= \begin{bmatrix} q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, & \tilde{\varphi} &= \begin{bmatrix} p \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Ayant une description détaillée de la fonction de transfert relative pondérée (13) évaluant la performance globale, on peut appliquer le Théorème 5 pour la synthèse de la loi de commande. Étant donné que le choix de x, y, z ne fait pas l'objet de cet article, la description d'une approche le réalisant est reportée dans Kornienko et al. (2011a). Selon cette approche on obtient $x = -1.24$, $y = 0.12$ et $z = 1$ et $\mu = 23.27 dB$. Ceci nous permet d'adapter la contrainte fréquentielle locale (fixant $W_i(s)$, $W_o(s)$) garantissant que la fonction de transfert globale S_{glob} respecte le cahier de charge fixé par W_s . Le correcteur obtenu est $K(s) = 4.7(s + 27.4)/s$ avec les résultats correspondants représentés sur la Figure 4.

7. CONCLUSION

Une méthode de synthèse de la loi de commande décentralisée pour des systèmes de grande dimension garantissant la stabilité et un niveau de performance globales a été proposée dans cet article comme une extension du résultat précédent Kornienko et al. (2011b).

Grâce à la technique de la μ -analyse classique et son amélioration adaptée aux systèmes de grande dimension, il est possible d'étudier la robustesse face à des différences inévitables entre des sous-systèmes causées par les dispersions technologiques. Ceci représente une perspective intéressante de travail futur.

RÉFÉRENCES

- Fax, J. and Murray, R. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans. Aut. Control*, 49(9), 1465 – 1476.
- Kornienko, A., Scorletti, G., Colinet, E., and Blanco, E. (2011a). Control law design for distributed multi-agent systems. Technical report, Laboratoire Ampère, Ecole Centrale de Lyon. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00630543/en/>.
- Kornienko, A., Scorletti, G., Colinet, E., Blanco, E., Juillard, J., and Galayko, D. (2011b). Control law synthesis for distributed multi-agent systems : Application to active clock distribution networks. In *Proc. American Control Conf.*, 4691– 4696. San Francisco.
- Liu, Y., Jia, Y., Du, J., and Yuan, S. (2009). Dynamic output feedback control for consensus of multi-agent systems : An h_∞ approach. In *Proc. American Control Conf.*, 4470 –4475. St. Louis.
- Moylan, P.J. and Hill, D.J. (1978). Stability criteria for large-scale systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-23(2), 143–149.
- Murray, R. (2007). Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems. *J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.129, No. 5, 571–583.
- Olfati-Saber, R., Fax, J., and Murray, R. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. IEEE*, 95(1), 215 –233.
- Rantzer, A. (1996). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 27(5).
- Ren, W., Beard, R., and Atkins, E. (2005). A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In *Proc. American Control Conf.*, volume 3, 1859 – 1864. Portland.
- Scorletti, G. and Duc, G. (2001). An LMI approach to decentralized H_∞ control. *Int. J. Control*, 74(3), 211–224.
- Tonetti, S. and Murray, R. (2010). Limits on the network sensitivity function for homogeneous multi-agent systems on a graph. In *Proc. American Control Conf.*, 3217 –3222. Baltimore.
- Wieland, P. and Allgöwer, F. (2010). On consensus among identical linear systems using input-decoupled functional observers. In *Proc. American Control Conf.*, 1641 –1646. Baltimore.